

Mounoud, P.
Osaka J. Math.
48 (2011), 149–178

SUR L'ESPACE DES CONFIGURATIONS D'UNE ARAIGNÉE

PIERRE MOUNOUD

(Received May 8, 2009, revised October 16, 2009)

Abstract

We study the configuration space of the linkages called “spiders”. Let g be a non negative integer and r be the greatest integer such that 2^r divide $g - 1$. We show that there exists a spider whose configuration space is diffeomorphic to an orientable compact surface of gender g if and only if $(1/2^r)(g - 1) \leq 6r + 12$. Afterward we give a method that allows to describe a large family of singular configuration spaces.

Résumé

On étudie les espaces des configurations des systèmes articulés appelés « araignées ». Soit g un entier positif et r le plus grand entier tel que 2^r divise $g - 1$. On montre qu'il existe une araignée dont une composante connexe de l'espace des configurations est difféomorphe à une surface compacte orientable de genre g si et seulement si $(1/2^r)(g - 1) \leq 6r + 12$. On donne ensuite un méthode permettant de décrire complètement une large famille d'espaces de configurations singuliers.

1. Introduction

On appelle « araignée à n pattes » le système articulé réalisé de la façon suivante. On considère $2n$ barres rigides de longueurs quelconques (non nulles). On les attache ensemble par paire de façon à obtenir n « pattes ». On choisit une extrémité de chacune de ces pattes que l'on appelle « pied ». On se donne n points (fixes) et on attache un pied en chacun de ces points. Enfin, on identifie entre elles les n extrémités libres des pattes de façon à former le « corps » de l'araignée (il faut donc que les pattes soient suffisamment longues). Le système articulé obtenu ressemble à une araignée ayant n pieds collés au sol. On suppose bien sûr que les pattes peuvent se croiser librement.

Nous allons nous intéresser à l'espace des configurations de ce système mécanique que l'on va noter \mathcal{C}_A . Cet espace est naturellement un fermé de \mathbb{C}^{n+1} . Pour le voir, nous allons préciser les choses. On identifie le plan au corps des nombres complexes \mathbb{C} . On désigne par $\omega_1, \dots, \omega_n$ les points du plan où sont collés les pieds. On désigne par l_i la longueur de la barre attachée à ω_i , par z_i l'extrémité libre de la barre (le « genou » en quelque sorte), par L_i la longueur de la barre attachée en z_i et par z_0 le

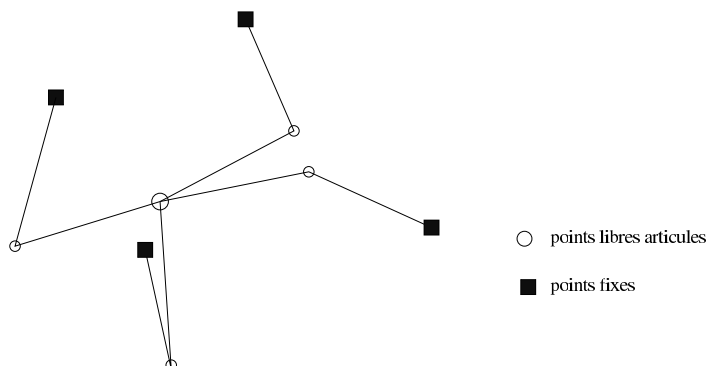


Fig. 1. Une araignée à 4 pattes.

corps. On a clairement :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} ; \forall i \in \{1, \dots, n\}, |z_i - \omega_i| = l_i \text{ et } |z_0 - z_i| = L_i\}.$$

Le but de ce papier est de déterminer quelles sont les araignées dont l'espace des configurations est lisse et surtout de déterminer quelle est alors la topologie de cet espace.

Les araignées ont déjà donné lieu à des travaux, citons ici l'article de Schvalb, Shoham et Blanc [4] (qui contient un analogue de la proposition 3.1) et l'article de J. O'Hara [3] (qui répond aux questions posées plus haut pour une araignée très symétrique). Les araignées sont des cas particuliers d'espaces des configurations de systèmes articulés, espaces étudiés dans de nombreux travaux citons notamment [2]. Dans cet article Kapovich et Millson montrent que toute variété compacte orientable peut être vue comme une composante connexe de l'espace des configurations d'un système articulé, donnant même un algorithme permettant d'associer, à une équation algébrique, un système articulé. Malgré cela, il serait intéressant de connaître explicitement une famille simple de systèmes articulés réalisant toutes les surfaces compactes orientables.

Les araignées forment une famille de systèmes articulés simple mais riche dont les espaces de configurations sont de dimension (réelle) 2. La première partie de ce papier est consacrée à l'étude des configurations lisses. Le principal résultat de cette partie est :

Théoreme 1.1. *Soit g un nombre entier et r le plus grand entier tel que 2^r divise $g - 1$. Une surface compacte orientable lisse de genre g est difféomorphe à (une composante connexe de) l'espace des configurations d'une araignée si et seulement si $(1/2^r)(g - 1) \leq 6r + 12$.*

Ainsi toutes les surfaces compactes et orientables ne sont pas réalisables en tant que composantes connexes de l'espace des configurations d'une araignée. On voit que la surface la plus simple qui n'est pas réalisable est la sphère à 14 anses.

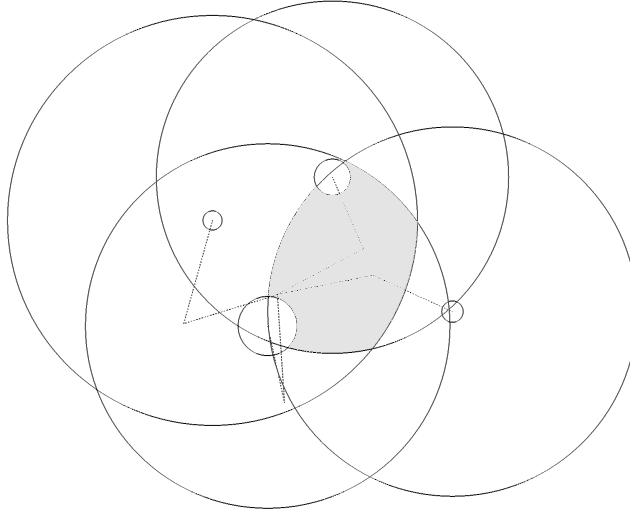


Fig. 2. $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ lorsqu'on \mathcal{A} est l'araignée de la figure 1.

La suite du papier est consacrée à l'étude des espaces de configurations singuliers. Les singularités de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ se voient sur le projeté de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ sur \mathbb{C} obtenu par l'application « première coordonnée », c'est-à-dire sur l'ensemble des positions que peut prendre le corps de l'araignée. Nous nous sommes limités au cas où les singularités se projettent sur un ensemble discret de \mathbb{C} . Le théorème 6.6 décrit toutes les singularités possibles dans ce cas pour l'espace des configuration $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. De plus nous détaillons à la section 7 une méthode permettant de décrire complètement $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ lorsque son lieu singulier se projette sur un point de \mathbb{C} .

Je remercie Charles Boubel pour son idée d'utiliser la sphère \mathbf{S}^2 lors de la preuve de la proposition 4.4. Il m'a permis de raccourcir considérablement cette preuve.

2. Premières propriétés

On désigne par Π la projection de \mathbb{C}^{n+1} dans \mathbb{C} qui à (z_0, z_1, \dots, z_n) associe z_0 (cette application est aussi connue sous le nom de « work map »), $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ est l'ensemble des points du plan où le corps de l'araignée peut se rendre (connu aussi sous le nom de « work space »). On va étudier $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ via son image par Π .

Soient $r_i = |L_i - l_i|$, $R_i = l_i + L_i$ et A_i la couronne fermée centrée en ω_i de petit rayon r_i (éventuellement nul) et de grand rayon R_i (c'est-à-dire $A_i = \bar{D}(\omega_i, R_i) \setminus D(\omega_i, r_i)$). Il est facile de voir que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \bigcap_{i=1}^n A_i$. On désignera par Γ_i le grand cercle bordant A_i et par γ_i le petit cercle bordant A_i .

DÉFINITION 2.1. Soit U une composante connexe de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \bigcap_{i=1}^n A_i$. On définit ∂U , le bord de U , par $\partial U = \bigcup_{i=1}^n (U \cap \partial A_i)$. On appelle *côtés* de ∂U les arcs

de cercles (de longueur possiblement nulle) formant le bord de U (ie les composantes connexes des $U \cap \Gamma_i$ et des $U \cap \gamma_i$). On appelle *sommets* de ∂U les points appartenant à l'intersection de deux côtés de ∂U .

On dira qu'un sommet s de ∂U est un point de tangence (resp. un point triple, resp. un point spécial) si tous les côtés se coupant en s sont tangents deux à deux en s (resp. si s appartient à au moins trois côtés non tous tangents, resp. si s appartient à au moins deux côtés dont l'un est réduit à un point).

On dira qu'un sommet s est un point singulier s'il est un point de tangence ou un point triple ou un point spécial.

Les cercles considérés pouvant être de rayon nul, les côtés peuvent être réduit à un point, et ce point pouvant aussi être considéré comme un sommet (on a alors un point spécial). Lorsqu'il existe une composante connexe du bord de U réduite à un cercle-point, ∂U n'est pas le bord topologique.

DÉFINITION 2.2. On dira que la patte i , c'est-à-dire le triplet (ω_i, z_i, z_0) , est tendue, (totalement) repliée, tournée vers la gauche ou tournée vers la droite selon que l'argument de $(z_0 - z_i)/(z_i - \omega_i)$ appartienne à $\{\pi\}$, $\{0\}$, $]0, \pi[$ ou $]-\pi, 0[$.

L'araignée \mathcal{A} en position $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ a une patte tendue ou repliée si et seulement si $\Pi(x) \in \partial U$. Plus précisément sa $i^{\text{ème}}$ patte est tendue (resp. repliée) si et seulement si $\Pi(x)$ appartient au cercle Γ_i (resp. γ_i).

REMARQUE 2.3. Si l'on se donne $\Pi(x)$ (c'est-à-dire la position du corps) et si $\Pi(x) \notin \partial A_i$, on voit, par un argument de géométrie élémentaire, que z_i peut prendre exactement deux valeurs, l'une correspondant à une patte tournée vers la gauche, l'autre à une patte tournée vers la droite. Si $\Pi(x) \in \gamma_i$ et si $r_i \neq 0$ ou si $\Pi(x) \in \Gamma_i$ alors il n'y a plus qu'une valeur de z_i possible. Enfin si $\Pi(x) = \omega_i$ (donc $r_i = 0$) alors z_i peut être n'importe quel point du cercle de centre ω_i et de rayon l_i .

Si $y \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et si y appartient à $l \geq 0$ côtés de $\partial \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ alors $\Pi^{-1}(y)$ contient 2^{n-l} éléments.

NOTA BENA. Dans la suite on indexera souvent par des vecteurs de \mathbb{Z}_2^n ou d'espaces vectoriels quotients de cet espace. On désigne par e_1, \dots, e_n les vecteurs de la base canonique de \mathbb{Z}_2^n . Si $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ correspond à une position où \mathcal{A} n'a aucune jambe tendue ni repliée on peut associer à x le vecteur $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, déterminé par $u_i = 1$ si et seulement si la $i^{\text{ème}}$ patte de \mathcal{A} est tournée vers la gauche. De la même façon on indexe les parties connexes de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ sur lesquelles l'araignée n'a aucune jambe tendue ni repliée. On raffine ce procédé : si L est une partie de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ sur laquelle seules les pattes i_1, \dots, i_m se retournent (c'est-à-dire sont parfois tournées vers la gauche et parfois vers la droite) alors on attribuera à L un vecteur de $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$. Dans ce qui suit tout indice appartenant à \mathbb{Z}_2^n ou à un quotient se rapportera à la position des pattes.

On peut aussi remarquer que si l'on se donne deux points proches dans $\Pi(\mathcal{C}_A)$ alors on peut toujours trouver deux points proches dans \mathcal{C}_A se projetant sur eux. On en déduit que l'image d'une composante connexe de \mathcal{C}_A par Π est égale à une composante connexe de $\Pi(\mathcal{C}_A)$.

Proposition 2.4. *Soit \mathcal{A} une araignée à n pattes et soient A_1, \dots, A_n les n couronnes lui étant associées. On désigne par U_1, \dots, U_l les composantes connexes de $\Pi(\mathcal{C}_A) = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Soit $O_j = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \partial A_i \cap U_j = \emptyset\}$.*

Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, $\Pi^{-1}(U_j)$ a 2^{o_j} composantes connexes deux à deux homéomorphes, où $o_j = \text{card } O_j$. Ainsi \mathcal{C}_A a $\sum_{j=1}^l 2^{o_j}$ composantes connexes.

De plus si $o_j > 0$ et si $i \in O_j$, on désigne par \mathcal{A}' l'araignée obtenue en enlevant la patte (ω_i, z_i, z_0) à \mathcal{A} . Alors chaque composante connexe de \mathcal{C}_A se projetant sur U_j est homéomorphe à une composante connexe de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}'}$.

Preuve. À chacune des 2^n composantes connexes de $\Pi^{-1}(U_j \setminus \partial U_j)$ on associe $v \in \mathbb{Z}_2^n$ comme indiqué ci-dessus. La composante d'indice v et celle d'indice v' peuvent être reliées si et seulement si pour tout $i \in O_j$ les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées de v et v' sont égales. Ce qui donne le premier résultat.

Si $o_j > 0$, il existe deux composantes connexes distinctes K et K' se projetant sur U_j . Cela signifie qu'il existe un certain nombre $e_j \leq o_j$ de pattes de \mathcal{A} qui pour tout $x \in K$ sont toujours tournées vers la gauche (resp. vers la droite) et pour tout $x \in K'$ sont toujours tournées vers la droite (resp. vers la gauche). À une configuration $x \in K$, on peut associer la configuration $y \in K'$ obtenue en retournant ces e_j pattes et en ne touchant pas aux autres pattes. On définit ainsi un difféomorphisme d'un voisinage de K dans un voisinage de K' envoyant K sur K' .

Soit $i \in O_j \neq \emptyset$. Soit \mathcal{A}' l'araignée obtenue en enlevant la $i^{\text{ème}}$ patte de \mathcal{A} . L'application de \mathbb{C}^{n+1} dans \mathbb{C}^n qui à (z_0, z_1, \dots, z_n) associe $(z_0, \dots, \hat{z}_i, \dots, z_n)$ envoie une composante connexe se projetant sur U_j dans une composante connexe de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}'}$. Comme $i \in O_j$, la remarque 2.3 nous dit que l'on peut calculer z_i en fonction de z_0 et trouver une application réciproque lisse. \square

La proposition nous dit donc que, si l'on s'intéresse à la topologie des composantes connexes de \mathcal{C}_A , on peut supposer (en reprenant les notations de la proposition) que pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, on a $o_j = 0$. Ce qui nous amène à la définition suivante :

DÉFINITION 2.5. Soit \mathcal{A} une araignée et K une composante connexe de \mathcal{C}_A . On dira que la patte i est *utile* à K si γ_i ou Γ_i rencontre $\partial \Pi(K)$.

Ainsi la proposition 2.4 dit notamment que toutes les pattes de \mathcal{A} sont utiles à K si et seulement si $\Pi^{-1}(\Pi(K)) = K$.

La première question concernant les composantes connexes de \mathcal{C}_A est de savoir s'il s'agit ou non de sous-variétés lisses.

Proposition 2.6. *Soit K une composante connexe de \mathcal{C}_A non réduite à un point. K est lisse au voisinage de x si et seulement si $\Pi(x)$ n'est pas un point singulier (ce qui justifie a posteriori la terminologie).*

Preuve. Dans [4] les auteurs montrent que si $\Pi(x)$ n'est pas un point singulier alors l'application définissant \mathcal{C}_A est une submersion, ce qui montre une implication (on peut aussi construire à la main des coordonnées au voisinage de x). L'implication réciproque est une conséquence de la section 6. \square

3. Topologie des composantes lisses

Proposition 3.1. *Soit K une composante connexe lisse de \mathcal{C}_A . On note p le nombre de sommets de $\partial\Pi(K)$, k son nombre de composantes connexes et n le nombre de pattes de A utiles à K . Alors K est difféomorphe à une surface compacte connexe orientable de genre $g = 1 + 2^{n-3}(p + 4k - 8)$.*

Preuve. Il est évident que K est compacte et orientable (car K est globalement définie par une submersion). Pour simplifier les notations on suppose que n correspond au nombre de pattes de A . L'application Π étant une submersion (au voisinage de K) à fibres compactes, une petite perturbation des longueurs des pattes de l'araignée ne change pas la topologie de K . On peut donc supposer que $\partial\Pi(K)$ ne contient pas de cercles-points. On pose $U = \Pi(K)$. On a vu que $\Pi^{-1}(U \setminus \partial U)$ a 2^n composantes connexes. On les note B_v avec $v \in \mathbb{Z}_2^n$, v indiquant dans quel sens est tourné chaque patte. On note \bar{B}_v l'adhérence de B_v . La restriction de Π à \bar{B}_v est un homéomorphisme sur U (on utilise la remarque 2.3 pour définir la réciproque). On définit les sommets et les côtés de B_v comme étant les sous-ensembles de \bar{B}_v qui se projettent sur les sommets et les côtés du bord de U .

On constate aussi que $\bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^n} \bar{B}_v = K$ et que si $\bar{B}_v \cap \bar{B}_w \neq \emptyset$ alors cette intersection est égale à une réunion de côtés ou de sommets de ∂B_v . Autrement dit on a affaire à un pavage de K .

La proposition 2.6 nous dit que le long d'un côté de B_v une seule patte est tendue ou repliée et qu'en un sommet de B_v exactement deux pattes sont tendues ou repliées. Ainsi deux pavés ont un côté (respectivement un sommet) en commun si et seulement si leurs indices ont $n - 1$ (resp. $n - 2$) coordonnées identiques. On voit donc que les sommets des pavés sont recollés 4 à 4 afin d'obtenir les sommets du pavage (il part donc quatre arêtes de chaque sommet du pavage).

Les 2^n pavés sont deux à deux difféomorphes mais ne sont pas, a priori, simplement connexes (i.e. n'ont pas qu'une seule composante de bord). Aussi, lorsque k , le nombre de composantes connexes de bord, est supérieur à 1, on coupe chaque B_v de façon à relier ses composantes connexes de bord entre elles (voir figure 3). Le pavé obtenu a donc $4(k - 1)$ nouveaux sommets et qu'une seule composante de bord. Ainsi, le nouveau pavé a autant de sommets que de côtés ($p + 4(k - 1)$). De plus, ces nou-

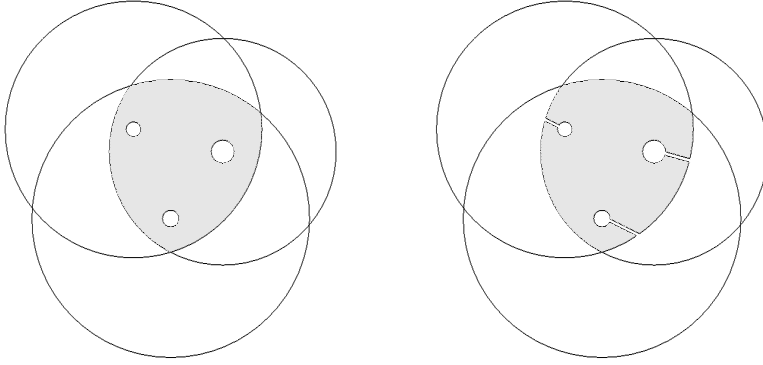


Fig. 3. Une brique B_v et sa modification simplement connexe.

veaux sommets sont aussi recollés 4 à 4. On peut donc exprimer le nombre d'arêtes du pavage et le nombre de sommets du pavage en fonction du nombre de pavés et du nombre de sommets d'un pavé. Le calcul de la caractéristique d'Euler de K est donc facile :

$$\begin{aligned}\chi(K) &= 2^n - 2^{n-1}(p + 4(k - 1)) + 2^{n-2}(p + 4(k - 1)) \\ &= 2^{n-2}(p + 4(k - 1) - (2p + 8(k - 1)) + 4) \\ &= -2^{n-2}(p + 4k - 8).\end{aligned}$$

Donc K est du genre annoncé. □

La proposition 3.1 dit en fait que pour déterminer la topologie d'une composante connexe lisse K de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$, il suffit d'estimer le nombre de sommets et de composantes connexes du bord de $\Pi(K)$. C'est ce qui est fait à la section suivante. On déduit directement des propositions 4.4, qui sera démontrée à la section 4, et 3.1 le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Une surface compacte orientable lisse de genre g est difféomorphe à (une composante connexe de) l'espace des configurations d'une araignée si et seulement s'il existe $(k, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tels que $1 \leq k \leq n + 1$, $n - k + 1 \leq p \leq 4n - 2k$, $p \neq 1$, p est pair lorsque $n = 2$ et $g = 1 + 2^{n-3}(p + 4k - 8)$.*

Qui a pour corollaires :

Corollaire 3.3. *Si \mathcal{A} a n pattes, si K est une composante connexe lisse de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ et si toutes les pattes de \mathcal{A} sont utiles à K alors le genre de K est compris entre $1 + 2^{n-3}(n - 4)$ et $1 + 2^{n-3}(6n - 6)$.*

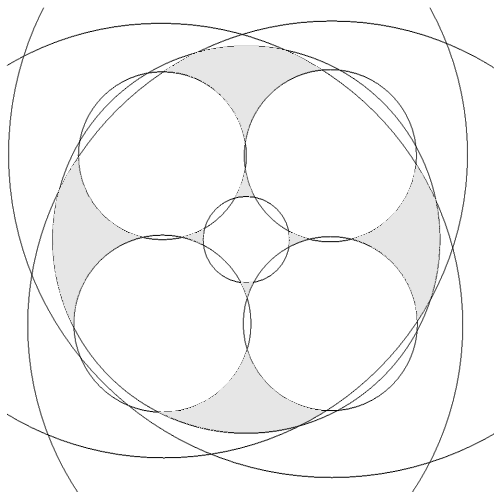


Fig. 4. Araignée à cinq pattes telle que \mathcal{C}_A a 22 composantes connexes.

Corollaire 3.4. *Soit g un entier et r plus grand entier tel que 2^r divise $g-1$. La surface compacte orientable de genre g est réalisable si et seulement si $(g-1)/2^r \leq 6r+12$.*

Preuve. On commence par remarquer que, à n fixé, $n \neq 2$, lorsque p et k prennent toutes les valeurs permises alors $(p+4k-8)$ prend toutes les valeurs comprises entre $n-4$ et $6n-6$. Ce qui montre le corollaire 3.3 ainsi que le «seulement si» du corollaire 3.4. Il nous reste à montrer que : si $(g-1)/2^r \leq 6r+12$, alors la surface compacte orientable de genre g est réalisable.

Si $r-1 \leq (g-1)/2^r \leq 6r+12$, le théorème 3.2 nous dit qu'il existe une araignée à $r+3$ pattes dont l'espace des configurations est une surface compacte orientable de genre g .

Si $1 \leq (g-1)/2^r < r-1$, on remarque que si $(g-1)/2^j < j-1$, alors $(g-1)/2^{j-1} \leq 6(j-1)+12$ donc il existe $s \leq r-2$ tel que $r-s-1 \leq (g-1)/2^{r-s} < 6(r-s)+12$ et donc il existe une araignée à $r-s+3$ bras donc l'espace des configurations est une surface compacte orientable de genre g . \square

Le théorème ne dit rien sur le nombre de composantes connexes, ni sur la somme des genres des composantes connexes. On se contentera juste de donner un exemple d'araignée à cinq pattes dont l'espace des configurations a un grand nombre de composantes connexes. Soit A l'araignée donnée par la figure 4. Les composantes connexes se projetant sur les triangles grisés sont des sphères d'après la proposition 3.1. L'image réciproque de chacun de ces triangles a 4 composantes connexes d'après la proposition 2.4. Ce qui fait déjà 16 composantes connexes. L'image réciproque de chacun des quadri-

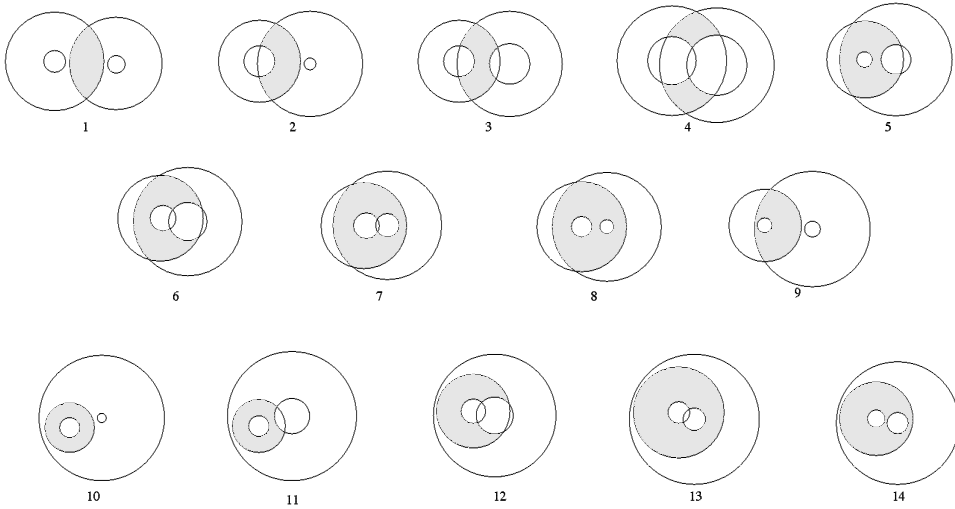


Fig. 5. Les 14 positions relatives de deux couronnes non tangentes.

latères grisés a deux composantes connexes et chacune d'elles est difféomorphe à un tore. L'image réciproque de chacun des pentagones est connexe et difféomorphe à une sphère à cinq anses. Ce qui donne 22 composantes connexes de trois types différents.

4. Description du bord d'une intersection finie de couronnes

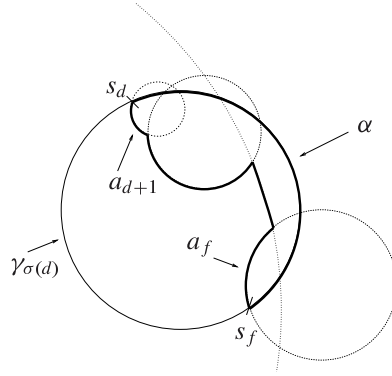
Si l'on se donne n couronnes dans le plan, leur intersection (en excluant les points singuliers) peut être assez compliquée à décrire. La situation avec 2 couronnes, bien qu'incomparablement plus simple, comporte déjà 14 cas (on laisse la vérification au lecteur, ces 14 cas sont représentés figure 5). La liste équivalente pour trois couronnes est déjà beaucoup plus longue. Toutefois ces listes contiennent plus d'information que nécessaire.

Pour étudier les problèmes d'intersection de couronnes, il est plus pratique de ramener le problème sur la sphère S^2 via une projection stéréographique.

DÉFINITION 4.1. Sur la sphère S^2 , appelons disque une des deux composantes connexes de S^2 privé d'un cercle.

On commence par montrer le résultat suivant :

Proposition 4.2. Soient $(D_i)_{i=1}^n$ des disques de S^2 et O une composante connexe de $K = \bigcap_{i=1}^n D_i$. La frontière ∂O de O est une union finie d'arcs de cercles juxtaposés en leurs extrémités, appelés sommets. On note p le nombre de sommets de ∂O et k le nombre de composantes connexes de ∂O . Alors $p \leq 2(n - k)$.

Fig. 6. Le domaine délimité par λ .

Tout repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Il existe un $i \leq n$ tel que $(\partial O) \cap D_i$ est connexe.*

Preuve. Soit D_{i_0} l'un des disques dont le bord rencontre celui de O . Si γ_{i_0} (on note γ_i le bord de D_i) ne contient pas de sommets alors $(\partial O) \cap D_{i_0} = \gamma_{i_0}$ et le lemme est vérifié. Supposons donc qu'il existe un sommet de O sur D_{i_0} , et notons le s_0 . Ce sommet est sur deux arcs de cercle contenus dans le bord de O . On va longer O en partant de s_0 en gardant O à notre droite (i.e. on oriente le bord de O). Si on suit l'arc a_1 partant de s_0 , on obtient un sommet s_1 dont part un arc a_2 . En itérant, on obtient une suite (périodique) de sommets $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et d'arcs de cercles $(a_i)_i$. On définit une application σ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} par $s_i \in D_{\sigma(i)} \cap D_{\sigma(i+1)}$ (on a $a_i \subset D_{\sigma(i)}$). On trouve facilement deux entiers d et f tels que $f > d$, que $\sigma(d) = \sigma(f+1)$ et que la restriction de σ à $\{d, \dots, f\}$ est injective.

Soit λ la courbe (fermée) donnée par la concaténation des arcs a_{d+1}, \dots, a_f et de α , l'arc du cercle $\gamma_{\sigma(d)}$ partant de s_d et arrivant à s_f (on suit donc $\gamma_{\sigma(d)}$ de façon à quitter ∂O). On note Λ le domaine ouvert délimité par λ (voir figure 6) et contenu dans $D_{\sigma(d)}$. Comme O est connexe, on voit que $O \subset D_{\sigma(d)} \setminus \Lambda$ (et donc que $\alpha \cap \partial O = \{s_d, s_f\}$).

Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $d < i < f+1$. Supposons que le cercle $\gamma_{\sigma(i)}$ rencontre $\partial O \setminus a_i$. Comme O est contenu dans $D_{\sigma(d)} \setminus \Lambda$, il coupe alors $\gamma_{\sigma(d)} \setminus \alpha$. Deux cas se présentent : soit s_{i-1} et s_i appartiennent à α ; soit $\gamma_{\sigma(i)} \cap \text{int}(\Lambda) \neq \emptyset$ mais alors $\gamma_{\sigma(i)}$ doit sortir de Λ , forcément en coupant α en deux points. On obtient dans les deux cas trois points d'intersections entre $\gamma_{\sigma(i)}$ et $\gamma_{\sigma(d)}$. C'est absurde, donc $\gamma_{\sigma(i)} \cap \partial O = a_i$ et donc $\gamma_{\sigma(i)} \cap \partial O$ est connexe. \square

Preuve de la proposition 4.2. On suppose $K \neq \emptyset$. On procède par récurrence. La proposition est évidente si $n = 2$. On la suppose vraie au rang $n-1$. Soit p_n le nombre de sommets de ∂O et k_n son nombre de composantes connexes. D'après le lemme et

quitte à permuter les indices, $(\partial O) \cap D_n$ est connexe. Quitte à repermuer les indices, il existe m tel que $i \leq m-1$ si et seulement si $\partial D_i \cap D_n = \emptyset$. Ce qui implique notamment que $\bigcap_{i=m}^n D_i = \bigcap_{i=1}^n D_i$. Soit O' la composante connexe de $K' = \bigcap_{i=m}^{n-1} D_i$ contenant O , s_{n-1} le nombre de sommets de $\partial O'$ et k_{n-1} son nombre de composantes de bord. L'hypothèse de récurrence s'écrit $s_{n-1} \leq 2(n-1-k_{n-1})$

Deux cas sont possibles :

- i) $(\partial O) \cap D_n = \partial D_n$;
- ii) $(\partial O) \cap D_n$ a deux extrémités e_0 et e_1 .

Dans le cas i), on a $\partial O' \subset D_n$ et donc $s_{n-1} = s_n$ et $k_n = k_{n-1} + 1$. Dans le cas ii), $s_n \leq s_{n-1} + 2$ et, comme toutes les composantes connexes de $\partial O'$ rencontre D_n , $k_n = k_{n-1}$. Dans tous les cas on a $s_n \leq 2(n-k_n)$. \square

On en déduit le résultat qui nous intéresse :

Proposition 4.4. *Soient $n \geq 2$ et A_1, \dots, A_n des couronnes de \mathbb{R}^2 . Soit U une composante connexe de $\bigcap_{i=1}^n A_i$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\partial A_i \cap \partial U \neq \emptyset$, et soient k le nombre de composantes connexes du bord de U et p le nombre de sommets de ∂U .*

Alors $1 \leq k \leq n+1$, $n-k+1 \leq p \leq 4n-2k$. De plus toutes les combinaisons sont réalisables sans points singuliers (même si on impose à $\bigcap_{i=1}^n A_i$ d'être connexe), sauf $p = 1$ et p impair lorsque $n = 2$.

Preuve. Par projection stéréographique, on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{S}^2 privé d'un point. Les disques du plan mais aussi les complémentaires des disques du plan sont envoyé sur des disques de \mathbb{S}^2 . Une intersection de n couronnes est donc envoyée sur une intersection de $2n$ disques de la sphère. La proposition 4.2 donne donc la première partie de l'énoncé.

Il est par ailleurs clair que si l'on interdit aux cercles d'être tangents, alors on ne peut pas avoir $p = 1$. On construit facilement les 7 combinaisons possibles avec $n = 2$ (voir figure 5, où on voit de plus que presque chaque combinaison a plusieurs réalisations) et on voit ainsi que si $n = 2$, alors on a aussi $p \neq 3$.

Soit A_1, \dots, A_{n-1} une configuration sans points singuliers de $n-1$ couronnes d'intersection connexe U ayant k composantes de bord et p sommets. On se donne maintenant trois façons d'y ajouter une $n^{\text{ième}}$ couronne dont le grand rayon sera vraiment grand et le petit rayon vraiment petit :

1. On ajoute une couronne A_n centrée en un des côtés de U . On prend A_n de telle sorte que son grand cercle ne rencontre pas U (c'est-à-dire très grand) et que son petit disque n'intersecte qu'un seul côté du bord de U (c'est-à-dire très petit). La configuration obtenue a n couronnes k composantes de bord et $p+2$ sommets ;
2. On ajoute une couronne A_n centrée en un des sommets de U . On prend A_n de telle sorte que son grand cercle ne rencontre pas U et que son petit disque ne rencontre que deux côtés du bord de U et ne contiennent qu'un seul côté. La configuration obtenue a n couronnes k composantes de bord et $p+1$ sommets ;

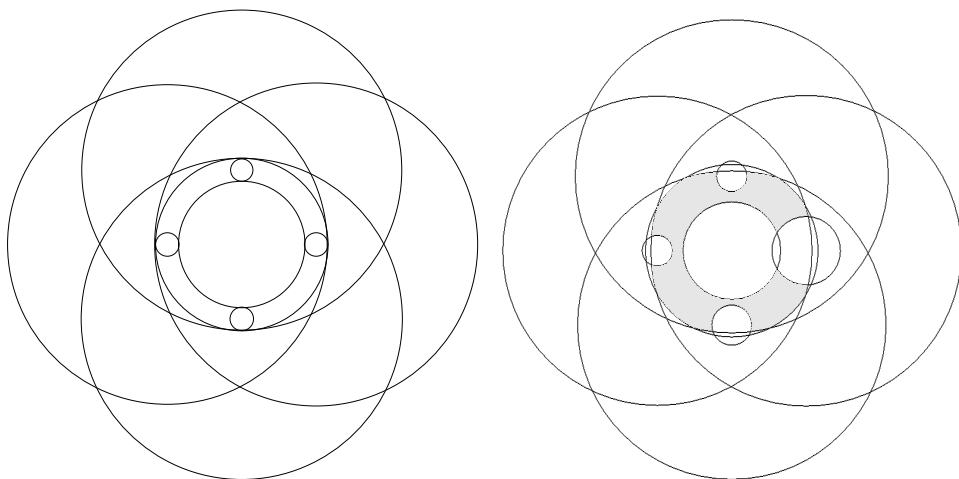


Fig. 7. Configuration de départ avec 5 couronnes et sa perturbation donnant $n = 5$, $k = 1$, $p = 18$.

3. On ajoute une couronne A_n centrée en un point appartenant à l'intérieur de U de telle sorte que son grand cercle ne rencontre pas U et que le disque délimité par son petit cercle ne rencontre pas le bord de U . La configuration obtenue a n couronnes $k + 1$ composantes de bord et p sommets.

Il est alors immédiat que si on sait construire toutes les configurations avec $n - 1$ couronnes, alors on peut, par ces trois procédés, construire toutes les configurations avec n couronnes sauf celles telles que $p = 4n - 2k$ et $p = n - 2k - 1$ (le procédé 3 suffit sauf pour $k = 1$, les deux premiers procédés donnent ensuite les cas manquants; si $n = 3$ la situation est un peu différente mais on y arrive aussi). La suite de cette preuve sera donc consacrée à montrer que ces dernières configurations sont réalisables, ce qui terminera la preuve de la proposition.

On identifie le plan à \mathbb{C} , on place un point c_n en 0 et $n - 1$ points c_1, \dots, c_{n-1} en les racines $(n - 1)^{\text{ème}}$ de l'unité. On trace des petits disques disjoints centrés en chacun des c_i pour $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ de même rayon. On rajoute les deux disques centrés en c_n et tangents à tous ces petits disques, que l'on note D_n et d_n . Enfin on trace les disques D_i centrés en chacun des c_i pour $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ tangents à D_n (voir figure 7, pour le cas $n = 5$). Les couronnes A_i sont, bien entendu, les couronnes de petit disque d_i et de grand disque D_i . On note U l'intersection de ces n couronnes. Cette configuration de départ dépend beaucoup de la parité de n : si n est impair le point de tangence entre D_i et D_n est le même que celui entre $d_{i \pm (n-1)/2}$ et D_n ($i \pm (n - 1)/2$ désignant l'indice du sommet opposé à c_i).

On va maintenant perturber cette configuration pour obtenir toutes les configurations avec $p = 4n - 2k$ pour $n \geq 3$. Commençons par $k = 1$ et donc $p = 4n - 2$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, on rétrécit D_i , le point de tangence entre D_i et D_n se transforme

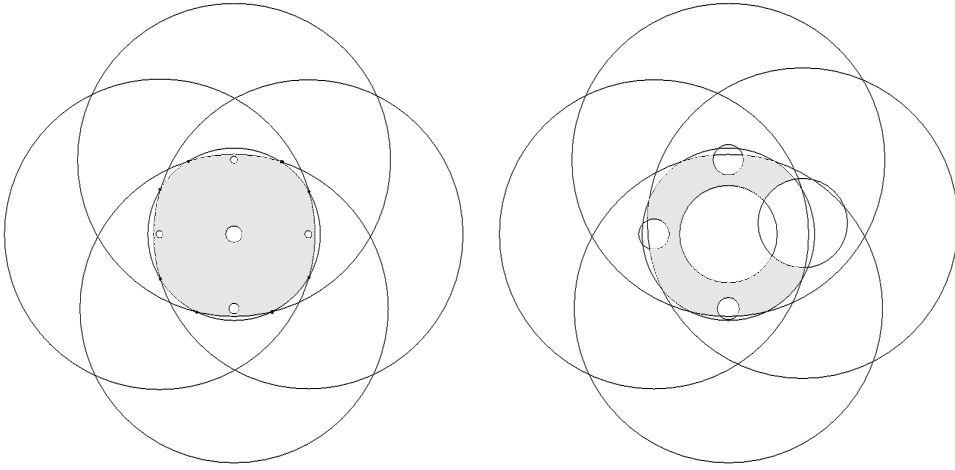


Fig. 8. Perturbations donnant $n = 5$, $k = 6$, $p = 8$ et $n = 5$, $k = 1$, $p = 17$.

en deux points d'intersections qui peuvent être choisis aussi proche que l'on veut l'un de l'autre. On peut, en particulier, les prendre de telle façon que les arcs de cercle délimités sur D_n par chacune de ces paires de points sont tous disjoints. Il s'agit donc de sommets de U . On les choisit aussi de telle sorte que les c_i appartiennent tous à l'intérieur de $\bigcap_{i=1}^n D_i$. La situation dépend maintenant de la parité de n .

– Si n est impair et si la perturbation n'est pas trop importante, D_i et $d_{i \pm (n-1)/2}$ s'intersectent maintenant eux aussi en deux points qui sont aussi des sommets de U .

– Si n est pair et si la perturbation n'est pas trop importante, pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ le point de tangence entre d_i et D_n appartient à $\bigcap_{i=1}^n D_i$. On dilate alors chaque d_i d'un même facteur en les gardant disjoints. Les deux points de $d_i \cap D_n$ peuvent être pris aussi proche que l'on veut l'un de l'autre. En particulier, on peut les prendre sur un même côté de $\bigcap_{i=1}^n D_i$. On modifie d_n de façon à ce qu'il redevienne tangent aux autres d_i .

Le bord de D_n contient maintenant $4n-4$ sommets de U et le disque d_n contient $n-1$ points de tangence. On augmente le rayon de d_1 suffisamment peu pour ne pas modifier l'ordre des $4n-4$ sommets de U qui sont sur D_n . On diminue maintenant le rayon de d_n suffisamment peu pour que d_1 et d_n s'intersectent toujours en deux points. Pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, on a maintenant $d_i \cap d_n = \emptyset$. On en déduit que U est connexe, son bord est connexe et a $4n-2$ sommets. C'est bien la configuration cherchée.

Pour faire varier k , comme on s'est assuré que c_1, \dots, c_n appartiennent à $\bigcap_{i=1}^n D_i$, il suffit de diminuer un par un les rayons des disques d_i jusqu'à avoir $d_i \subset \bigcap_{i=1}^n D_i$. En commençant par d_n et en finissant par d_1 , à chaque fois k augmente de 1 et p diminue de 2, on reste bien parmi les configurations maximales. On note les configurations obtenues $M_{n,k}$ (la figure 8 représente $M(5, 6)$).

On construit une deuxième famille d'exemples, qui réalise $p = 4n - 2k - 1$ pour $n \geq 3$ et $k \neq n + 1$. On considère une configuration $M_{n,k}$, d'intersection U comme $k \neq n + 1$, le disque d_1 coupe le bord de U en deux points s_1 et s'_1 . Il part de s_1 (respectivement s'_1) un arc de cercle qui borde U et qui n'est pas sur d_1 (il est sur D_n si n est pair et sur $D_{1+(n-1)/2}$ si n est impair). Si on le suit on aboutit au sommet s_2 (respectivement s'_2). Vu la construction de $M_{n,k}$, on peut choisir les points s_1 et s_2 aussi proche l'un de l'autre que l'on veut. On déplace maintenant c_1 (et donc d_1 et D_1) suffisamment peu pour ne pas changer ni p ni k (ce qui est possible car il s'agit de conditions ouvertes) et de telle sorte que c_1 soit maintenant plus proche de s_2 que de s'_2 . On dilate alors d_1 jusqu'à ce qu'il contienne s_2 dans son intérieur mais pas s'_2 . Si on a pris soin de placer s_2 proche de s_1 , on peut le faire sans que d_1 rencontre d'autres disques que D_n (et d_n si $k = 1$). La configuration obtenue a un sommet de moins (s_2 n'appartient plus à U) et autant de composantes de bord que $M_{n,k}$, c'est donc une configuration du type voulu (voir figure 8, pour le cas $n = 5$, $k = 1$, $p = 17$).

On construit maintenant la dernière famille, pour réaliser $k = n + 1$ et $p = 2n - 3$ pour tout $n \geq 3$. On part de la configuration $M_{n-1,n}$, d'intersection U . On choisit un sommet $s \in D_{n-1} \cap D_n$ du bord de U , et un point c qui est sur la droite joignant s à c_{n-1} , qui appartient à l'intérieur de U mais qui n'appartient pas au segment $[s, c_{n-1}]$. Soit D le disque de centre c dont le bord passe par s , il est tangent extérieurement à D_{n-1} en s . Il contient donc U . On rétrécit D suffisamment peu pour que le bord de D ne rencontre aucun des disques d_i et contienne tous les sommets sauf s (ce qui est possible car il s'agit de conditions ouvertes). On place un disque d de centre s suffisamment petit pour avoir $d \subset U$. Soit A la couronne de petit disque d et de grand disque D . La configuration obtenue en rajoutant A à $M_{n-1,n}$ a n couronnes, $2n - 3$ sommets (on en a créé deux et détruit un) et $n + 1$ composantes de bord (on en a créé une). \square

5. Les araignées à deux pattes

Il est facile de voir que la figure 5 donne bien tous les cas possibles d'intersections de deux couronnes (si on exclut les cas vides ou réduit à un point et les cas singuliers au sens de la définition 2.1). On peut remarquer, comme l'a déjà fait Jun O'Hara dans [3], que l'espace des configurations des araignées à deux pattes coïncide avec les espaces de configurations des pentagones dont les longueurs des côtés et un sommet sont fixés. La proposition 3.1 nous permet donc de retrouver le théorème Kapovich et Millson (cf. [1]) décrivant cet espace, à savoir :

Théorème 5.1. *Si l'espace des configurations d'un pentagone (ie d'une araignée à deux pattes) est lisse et connexe alors il est difféomorphe à une surface compacte orientable de genre 0 (cas 1 de la figure 5), 1 (cas 2 et 12), 2 (cas 3, 5, 6, 9, 11 et 13), 3 (cas 7 et 14) ou 4 (cas 8). S'il est lisse mais pas connexe il est difféomorphe à deux copies d'une surface de genre 1 (cas 4 et 10).*

La donnée d'une araignée à deux pattes, revient en fait à la donnée de 5 nombres positifs : l_1, l_2, L_1, L_2 et $|\omega_1 - \omega_2|$. Pour avoir un énoncé vraiment équivalent à celui de Kapovich et Millson, il faudrait encore expliciter le lien entre ces cinq nombres et les 14 cas de la figure 5. Il s'agit clairement d'inégalité faciles à obtenir, mais fastidieuses à écrire. On paye ici le fait d'avoir privilégié un côté du pentagone lorsque l'on a fixé les pieds de l'araignée.

6. Singularités

L'espace des configurations peut avoir un certain nombre de singularités, celles-ci donnent sur $\Pi(\mathcal{C}_A)$ ce qu'on a appelé des points singuliers. On se propose maintenant de décrire topologiquement les images réciproques par Π d'un petit voisinage d'un point singulier isolé.

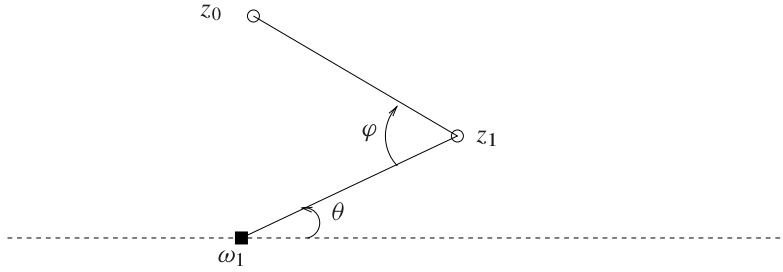
6.1. Points singuliers non isolés. Les points singuliers non isolés apparaissent lorsque qu'il existe i et j dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $\omega_i = \omega_j$ et $L_i + l_i = L_j + l_j$ ou $|L_i - l_i| = |L_j - l_j| \neq 0$ ou $L_i + l_i = |L_j - l_j|$. En l'absence de points spéciaux, le pavage défini dans le cas régulier est toujours bien défini. La brique B possède un côté le long duquel $l > 1$ pattes sont tendues. Cela entraîne que 2^l briques seront recollées le long de l'arête. On voit donc l'allure des singularités de \mathcal{C}_A . Cependant lorsque l'on rajoute des points spéciaux la présence de telles courbes multiplie le nombre de cas à considérer et rend l'exposé fastidieux. Nous supposons donc dans la suite que les points singuliers de $\Pi(\mathcal{C}_A)$ sont isolés.

6.2. Points singuliers isolés, pas de points spéciaux. Dans [4], les auteurs ont regardé les singularités les plus simples, ils montrent :

Proposition 6.1. *Soit $x \in \mathcal{C}_A$ tel que $\Pi(x)$ est un point triple ou de tangence. Soit l le nombre de pattes tendues ou repliées en x . Alors $\Pi(x)$ possède un voisinage dans le plan D tel que $\Pi^{-1}(D)$ est homéomorphe à 2^{n-l} copies disjointes d'un bouquet de 2^{l-1} disques (i.e. 2^{l-1} disques dont les centres sont identifiés deux à deux) si $\Pi(x)$ est un point de tangence ou d'un bouquet de 2^{l-2} disques sinon.*

Nous allons faire une remarque supplémentaire. Commençons par attribuer les numéros $1, \dots, l$ aux pattes tendues ou repliées en $\Pi(x)$. Distinguons ensuite trois cas. Premier cas, au voisinage de $\Pi(x)$, le bord de $\Pi(\mathcal{C}_A)$ est donné par un cercle (on a alors un point de tangence et $\Pi(\mathcal{C}_A)$ est inclus dans le plus petit disque ou dans le complémentaire du plus grand disque). Deuxième cas, au voisinage de $\Pi(x)$, le bord de $\Pi(\mathcal{C}_A)$ est donné par deux cercles sécants (on a un point triple). Troisième cas, au voisinage de $\Pi(x)$, le bord de $\Pi(\mathcal{C}_A)$ est donné par deux cercles tangents (on a alors un point de tangence et $\Pi(\mathcal{C}_A)$ est compris entre deux cercles).

Dans le premier cas, il existe une patte, disons la première, qui est tendue ou repliée sur le cercle du bord passant par $\Pi(x)$. Les images par Π des disques qui forment

Fig. 9. les angles θ et φ .

$\Pi^{-1}(D)$ sont égales à $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D$ et donc intersectent ce cercle. Par contre, si on choisit D petit, ces images ne rencontrent aucun autre côté. Ainsi à chacun des disques de $\Pi^{-1}(D)$ on peut associer un vecteur v dans $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1)$ donné par le sens dans lequel sont pliées les $n - 1$ autres pattes. En fait il y a bijection entre les vecteurs de $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1)$ et les disques de $\Pi^{-1}(D)$. On peut donc les désigner, sans ambiguïté, Δ_v^1 . Remarquons maintenant que deux disques Δ_v^1 et $\Delta_{v'}^1$ appartiennent au même bouquet si et seulement si $v = v' + w$ avec $w \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_l)$. Autrement dit on peut indexer les bouquets par les vecteurs de $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_l)$ et deux disques appartiennent au même bouquet si et seulement si leurs indices se projettent sur le même indice de bouquet.

Dans le deuxième cas, on peut supposer, quitte à permuter les indices, que $\partial \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$. Tout marche ensuite de la même façon, en remplaçant $\text{Vect}(e_1)$ par $\text{Vect}(e_1, e_2)$, on note Δ_v^2 les disques obtenus.

Dans le troisième, on peut faire la même construction mais il n'y a plus bijection entre les disques de $\Pi^{-1}(D)$ et les vecteurs de $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1, e_2)$. À chaque position des $n - 2$ dernière pattes correspond *deux* disques. C'est dû au fait que, dans ce cas, $D \cap \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ est lui même homéomorphe à un bouquet de deux disques. On note Δ_v^3 la réunion des *deux* disques ayant le même indice. La suite marche alors comme dans le premier cas.

Nous allons nous concentrer maintenant sur les araignées pour lesquelles il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\omega_i \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ et $l_i = L_i$. On dira qu'une telle patte est *centrée*.

6.3. Points spéciaux avec une unique patte centrée. On suppose maintenant que ω_1 est le pied d'une unique patte centrée (i.e. $l_1 = L_1$ et si $\omega_j = \omega_1$ alors $L_j \neq l_j$ ou $j = 1$). Commençons par définir des coordonnées sur un voisinage de $\Pi^{-1}(\omega_1)$.

Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ donnés par la figure 9, on a donc $e^{i\theta} = (z_1 - \omega_1)/l_1$ et, après un petit calcul, $e^{i\varphi} = (1/l_1)(\omega_1 - z_0)e^{-i\theta} + 1$.

Soit $\rho \in]0, \pi]$. On remarque que lorsque θ parcourt $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et φ parcourt $[-\rho, \rho]$ le corps z_0 parcourt le disque de centre ω_1 et de rayon $2l_1 \sin(\rho/2)$, que l'on notera D_ρ . On se donne dorénavant $\rho \in]0, \pi]$ tel que ω_1 soit le seul sommet de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ contenu dans D_ρ .

Il est clair que la donnée de $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\varphi \in [-\rho, \rho]$ détermine z_0 , la position du corps de l'araignée, et z_1 . Or z_0 appartient à $\Pi(\mathcal{C}_A)$ il est donc naturel de définir l'ensemble T suivant :

$$T = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho] \mid z_0 = \omega_1 + l_1 e^{i\theta}(1 - e^{i\varphi}) \in \Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho\}.$$

Posons $f(\theta, \varphi) = \omega_1 + l_1 e^{i\theta}(1 - e^{i\varphi})$, ce qui nous permet d'écrire $T = f^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho)$. Ainsi, pour peu que l'on décide dans quel sens sont pliées les $n - 1$ autres pattes, un point de T détermine un point de \mathcal{C}_A (une patte tendue ou repliée étant considérée comme pliée dans les deux sens). On définit ainsi 2^{n-1} applications f_u ($u \in \mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1)$) de T dans \mathcal{C}_A . Ces applications possèdent des inverses évidents, il s'agit donc d'homéomorphismes sur leurs images. Comme la réunion des $f_u(T)$ est égale à $\Pi^{-1}(D_\rho)$, on obtient donc que $\Pi^{-1}(D_\rho)$ est homéomorphe à 2^{k-1} copies de T recollées entre elles. Il nous faut donc faire deux choses : déterminer à quoi ressemble T et comprendre comment se recollent entre elles ces différentes copies.

6.3.1. Description de T . Le domaine $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A)$ est délimité par des cercles (les côtés de $\Pi(\mathcal{C}_A)$) passant par ω_1 et par le cercle $\{\varphi = \rho\}$.

Soit Γ un cercle de centre ω passant par ω_1 , et soit $E = \{(\theta, \varphi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid f(\theta, \varphi) \in \Gamma \cap D_\rho\}$. Soit α l'argument de $\omega_1 - \omega$, R le rayon de C et D le disque délimité par Γ . Par un calcul direct, on voit que

$$E = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{0\} \cup \{(\theta_R^1(\varphi), \varphi) \mid \varphi \in [-\rho, \rho]\} \cup \{(\theta_R^2(\varphi), \varphi) \mid \varphi \in [-\rho, \rho]\},$$

où $\theta_R^1(\varphi) = \arcsin((l_1/R) \sin(\varphi/2)) - \varphi/2 + \alpha$, $\theta_R^2(\varphi) = -\theta_R^1(\varphi) - \varphi + \pi$ et ρ est choisi suffisamment petit pour que tout soit bien défini. On remarque que $\theta_R^1(0) = \alpha$ et $\theta_R^2(0) = \pi + \alpha$. De plus

$$\varphi > 0 \Rightarrow [(\theta_R^1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_R^2(\varphi)) \Leftrightarrow f(\theta, \varphi) \in D]$$

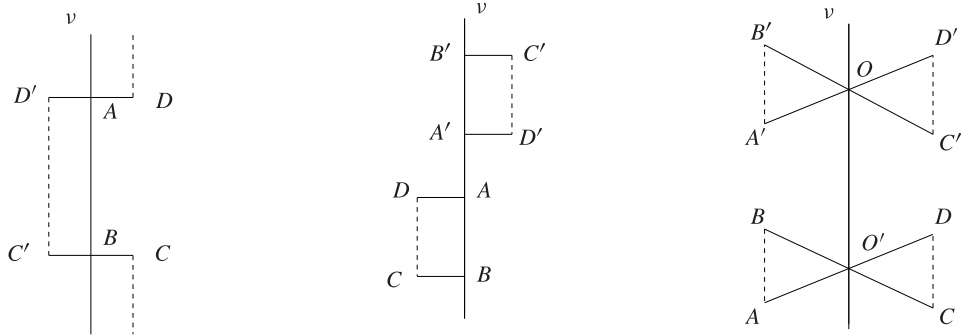
et inversement

$$\varphi < 0 \Rightarrow [\theta_R^2(\varphi) \leq \theta \leq \theta_R^1(\varphi) \Leftrightarrow f(\theta, \varphi) \in D].$$

Les modèles. On veut montrer qu'il n'y a, topologiquement, que trois possibilités pour T . Pour cela on commence par construire trois modèles. Soit $ABCD$ et $A'B'C'D'$ deux rectangles pleins. On appelle T^1 l'espace obtenu en identifiant A et A' puis B et B' . On appelle T^2 l'espace obtenu en reliant A et A' puis B et B' par un segment.

Soit $ABCD$ (respectivement $A'B'C'D'$) un quadrilatère croisé plein dont les côtés AD (resp. $A'D'$) et BC (resp. $B'C'$) se croisent en O (resp. O'). On appelle T^3 l'espace obtenu en reliant O et O' par deux segments distincts.

Dans les trois cas on a formé un cercle que l'on notera ν .

Fig. 10. Les trois modèles T^1 , T^2 et T^3 .

Premier cas. On suppose qu'il n'existe qu'un côté non réduit à un point de $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$ passant par ω_1 . Notons Γ_2 ce cercle, ω_2 son centre, R_2 son rayon et D_2 le disque qu'il délimite. Cela définit naturellement trois courbes dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho]$: le cercle d'équation $\varphi = 0$ et les graphes des fonctions $\theta_{R_2}^1$ et $\theta_{R_2}^2$. Ces courbes délimitent 4 domaines (cf. figure 11) dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho]$:

$$\beta_{+,ij} = \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \geq 0 \text{ et } \theta_{R_2}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_2}^j(\varphi)\},$$

$$\beta_{-,ij} = \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \leq 0 \text{ et } \theta_{R_2}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_2}^j(\varphi)\}.$$

D'après ce qui précède

$$f(\beta_{+,12} \cup \beta_{-,21}) = D_2 \cap D_\rho$$

et

$$f(\beta_{-,12} \cup \beta_{+,21}) = D_\rho \setminus D_2.$$

On en déduit que

$$T = \beta_{+,12} \cup \beta_{-,21}$$

ou

$$T = \beta_{-,12} \cup \beta_{+,21},$$

selon que la patte 2 soit tendue ou repliée le long de Γ_2 .

Dans les deux cas et quelles que soient les valeurs de R_2 , l_1 et α_2 , T est homéomorphe à T^1 .

Deuxième cas. Supposons maintenant que $\partial\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D$ est formé de deux arcs de cercles transverses. On note Γ_2 et Γ_3 ces deux cercles, ω_2 et ω_3 leurs centres, R_2

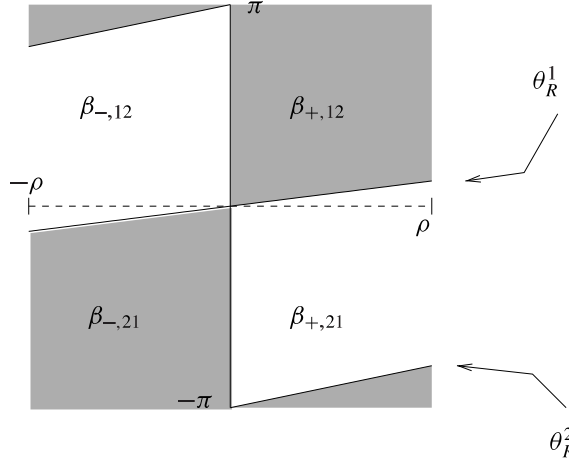


Fig. 11. Les quatre domaines $\beta_{\pm,ij}$, avec $R_2/l_1 > 1$ et $\alpha_2 = 0$.

et R_3 leurs rayons, α_2 et α_3 les arguments de $\omega_2 - \omega_1$ et de $\omega_3 - \omega_1$ et D_2 et D_3 les disques qu'ils délimitent.

On définit, pour ρ suffisamment petit, et $k \in \{2, 3\}$:

$$E_k = \{(\theta, \varphi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid f(\theta, \varphi) \in \Gamma_k \cap D_\rho\}.$$

Ces deux ensembles sont décrits comme précédemment par les fonctions $\theta_{R_k}^i$ avec $i \in \{1, 2\}$ et $k \in \{2, 3\}$. On définit comme ci-dessus les domaines $\beta_{\pm,ij}^k$ par :

$$\beta_{\pm,ij}^k = \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0) \text{ et } \theta_{R_k}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_k}^j(\varphi)\}.$$

Pour tout $k \in \{2, 3\}$, on a encore

$$f(\beta_{+,12}^k \cup \beta_{-,21}^k) = D_\rho \cap D_k$$

et

$$f(\beta_{-,12}^k \cup \beta_{+,21}^k) = D_\rho \setminus D_k.$$

On peut résumer dans le tableau suivant les différentes possibilités.

$\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D_\rho$	T
$D_\rho \cap D_2 \cap D_3$	$(\beta_{+,12}^2 \cap \beta_{+,12}^3) \cup (\beta_{-,21}^2 \cap \beta_{-,21}^3)$
$(D_\rho \cap D_2) \setminus D_3$	$(\beta_{+,12}^2 \cap \beta_{+,21}^3) \cup (\beta_{-,21}^2 \cap \beta_{-,12}^3)$
$(D_\rho \setminus D_2) \cap D_3$	$(\beta_{+,21}^2 \cap \beta_{+,12}^3) \cup (\beta_{-,12}^2 \cap \beta_{-,21}^3)$
$(D_\rho \setminus D_2) \setminus D_3$	$(\beta_{+,21}^2 \cap \beta_{+,21}^3) \cup (\beta_{-,12}^2 \cap \beta_{-,12}^3)$

Ayant supposé les cercles transverses (i.e. $\alpha_2 \neq \alpha_3$ modulo π), il est facile de voir que les quatre cas sont possibles (i.e. $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A)$ peut être n'importe lequel des quadrants que découpent les cercles Γ_2 et Γ_3).

Lorsque $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho = D_\rho \cap D_2 \cap D_3$ (ce qui correspond à une araignée ayant les pattes 2 et 3 *tendues* en ω_1), le bord de T est composé du cercle v , des deux segments $[\theta_{R_3}^2(-\rho), \theta_{R_2}^1(-\rho)] \times \{-\rho\}$ et $[\theta_{R_3}^1(\rho), \theta_{R_2}^2(\rho)] \times \{\rho\}$, des restrictions à $[-\rho, 0]$ des graphes des fonctions $\theta_{R_2}^1$ et $\theta_{R_3}^2$ et enfin des restrictions à $[0, \rho]$ des graphes des fonctions $\theta_{R_2}^2$ et $\theta_{R_3}^3$.

Quels que soient les paramètres, si ρ est suffisamment petit, les graphes ne s'intersectent pas et donc T est homéomorphe à T^2 . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que dans les trois autres cas l'espace obtenu est toujours homéomorphe à T^2 .

Troisième cas. On regarde maintenant le cas où deux cercles *tangents* de $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$ passent par ω_1 . On conserve les notations définies ci-dessus.

Si $\alpha_2 = \alpha_3$ (c'est-à-dire si Γ_2 et Γ_3 sont tangents intérieurement), alors, quitte à permuter les indices 2 et 3, $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A) = (D_\rho \cap D_3) \setminus D_2$. Si $\alpha_2 = \alpha_3 + \pi$ (c'est-à-dire si Γ_2 et Γ_3 sont tangents extérieurement) alors $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A) = (D_\rho \setminus D_3) \setminus D_2$.

Dans ces deux cas, T est délimité par les graphes des fonctions $\theta_{R_k}^i$, le cercle d'équation $\varphi = 0$ et 4 segments contenus dans les cercles d'équations $\varphi = \pm\rho$. Quels que soient les paramètres, si ρ est suffisamment petit, les graphes ne s'intersectent que sur la courbe $\varphi = 0$ et donc l'ensemble obtenu est homéomorphe à T^3 .

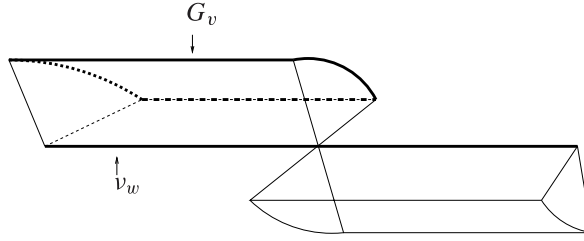
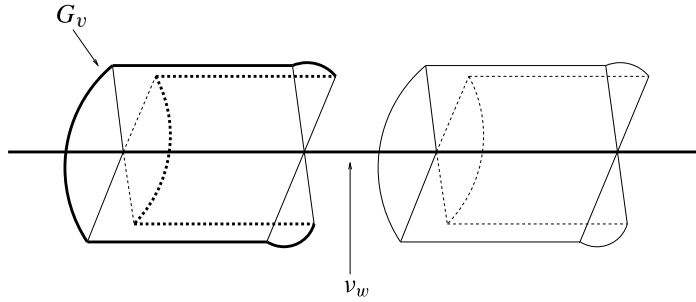
6.3.2. Collages. On part donc de 2^{n-1} exemplaires de T (les $f_u(T)$) qu'il nous reste à recoller. Chaque exemplaire a un indice u dans $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1)$ indiquant dans quel sens sont pliées les $n-1$ dernières pattes. Pour savoir recoller ces exemplaires de T il suffit de savoir quelles sont les pattes éventuellement tendues ou repliées sur $\Pi^{-1}(D_\rho)$. On regroupe les pattes en 4 ensembles :

DÉFINITION 6.2. Soit P_0 l'ensemble des pattes centrées issues de ω_1 (pour le moment P_0 est réduit à la première patte), P_1 l'ensemble des pattes qui sont tendues ou repliées sur D_ρ le long d'un bout de cercle, P_2 celui des pattes non issues de ω_1 qui ne sont tendues ou repliées sur D_ρ qu'en ω_1 et enfin P_3 l'ensemble des pattes qui ne sont ni tendues ni repliées sur D_ρ .

On note n_i le cardinal de P_i (on a $n_1 = 1$ ou 2 car au plus deux arcs de cercles de $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$ se rencontrent en un sommet). On numérote les pattes dans l'ordre suivant : tout d'abord les pattes de P_0 ensuite celles de P_1 puis celles de P_2 et enfin celles de P_3 .

On fera l'abus de langage qui consiste à identifier une patte et son numéro. En particulier on pose $V_i = \text{Vect}(e_j)_{j \in P_i}$ (les exemplaires de T sont donc indexés dans \mathbb{Z}_2^n/V_0).

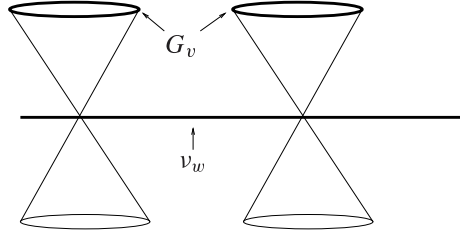
Les modèles. Dans ce paragraphe, nous définissons à partir des modèles T^i les espaces topologiques modèles Sing^i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$.


 Fig. 12. L'ensemble Sing_w^1 .

 Fig. 13. L'ensemble Sing_w^2 .

- L'espace Sing^1 est obtenu en recollant deux exemplaires de T^1 le long du cercle ν , puis des segments $[CC']$ et $[DD']$. L'espace obtenu est homéomorphe à deux disques recollés en deux points, cf. figure 12.
- L'espace Sing^2 est obtenu en recollant quatre exemplaires de T^2 tout d'abord le long de ν (on obtient alors deux « roues à quatre aubes »), ensuite en recollant le premier et le deuxième exemplaire le long de $[AD]$, $[A'D']$, le premier et le troisième le long de $[BC]$ et $[B'C']$, le deuxième et le quatrième le long de $[BC]$ et $[B'C']$ et enfin le troisième et le quatrième le long de $[AD]$ et $[A'D']$ (on recolle une « aube » à sa voisine une fois d'un côté une fois de l'autre). Cet espace est homéomorphe à deux conoïdes de Prücker bornés reliés par un cercle contenant leurs axes, cf. figure 13.
- L'espace Sing^3 est obtenu en recollant quatre exemplaires de T^3 selon le même procédé que pour Sing^2 . Cet espace est homéomorphe à deux cônes bornés reliés en leurs sommets par un cercle, cf. figure 14.

Remarquons que chacun de ces espace contient un cercle ν .

DÉFINITION 6.3. On appellera *collier de p espaces Sing^i* l'espace obtenu en recollant p exemplaires de Sing^i le long de leurs cercles ν . On appellera ce cercle le *fil* du collier.

Fig. 14. L'ensemble Sing_w^3 .

Premier cas. Supposons que $n_1 = 1$. En composant (implicitement) par un homéomorphisme de T dans T^1 , on identifie T et T^1 . Pour tout $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$, les pattes de P_1 et de P_2 sont les seules à être tendues ou repliées en un point de $f_u(v)$ et elles le sont en tout point de cette courbe. On a donc

$$\begin{aligned} \forall (u, u') \in (\mathbb{Z}_2^n/V_0)^2, u - u' \in V_1 \oplus V_2 &\Leftrightarrow f_u(v) \cap f_{u'}(v) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow f_u(T^1) \cap f_{u'}(T^1) \supset f_u(v). \end{aligned}$$

Seule la patte 2 est tendue ou repliée en un point de $f_u([CC'] \setminus \{A\})$ et $f_u([DD'] \setminus \{A'\})$, et elle l'est en tout point de cette courbe. On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall (u, u') \in (\mathbb{Z}_2^n/V_0)^2, u - u' \in P_1 &\Leftrightarrow f_u([CC'] \cup [DD']) \cap f_{u'}([CC'] \cup [DD']) \\ &\supseteq \{f_u(A), f_u(A')\} \\ &\Leftrightarrow f_u(T^1) \cap f_{u'}(T^1) \supset (f_u([CC']) \cup f_u([DD'])). \end{aligned}$$

Enfin si $x \in \Pi^{-1}(D_\rho)$ n'est pas sur une de ces courbes, alors aucune patte n'est ni tendue ni repliée donc il existe un unique $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$ tel que $x \in f_u(T^1)$. On a donc :

$$\forall (u, u') \in (\mathbb{Z}_2^n/V_0)^2, f_u(T^1) \cap f_{u'}(T^1) \subset (f_u(v) \cup f_u([CC']) \cup f_u([DD'])).$$

Ainsi pour tout $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$, $f_u(T^1) \cup f_{u+e_2}(T^1)$ est obtenu en recollant deux exemplaires de T^1 le long du cercle v , puis du segment $[CC']$ et enfin de $[DD']$ (cf. figure 12). Il est donc homéomorphe à Sing^1 . On peut naturellement associer à cet espace le vecteur w , projeté de u dans $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1$, on le note donc Sing_w^1 . On note v_w le cercle $f_u(v)$ vu comme un cercle tracé sur Sing_w^1 .

Le bord de Sing_w^1 est composé des deux cercles $f_u([CD]) \cup f_{u+e_2}([CD])$ et $f_u([C'D']) \cup f_{u+e_2}([C'D'])$. Le long du premier cercle la première patte est tournée vers la droite, le long du deuxième elle est tournée vers la gauche. On peut donc attribuer à $f_u([CD]) \cup f_{u+e_2}([CD])$ le vecteur v de \mathbb{Z}_2^n/V_1 qui se projette sur w et dont la première coordonnée est 1 et à $f_u([C'D']) \cup f_{u+e_2}([C'D'])$ le vecteur v' de \mathbb{Z}_2^n/V_1 qui se projette sur w et dont la première coordonnée est 0. On les note G_v et $G_{v'}$.

On fera attention au fait que les Sing_w^1 sont indexés dans $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1$ mais que leurs composantes de bord, les G_v , sont indexées dans \mathbb{Z}_2^n/V_1 .

Deuxième cas. Supposons maintenant que $n_1 = 2$ et $\alpha_2 \neq \alpha_3(\pi)$. On identifie cette fois T et T^2 . Par le même raisonnement qu'au premier cas, on voit que pour tout $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$, on a

$$\begin{aligned} f_u(T^2) \cap f_{u+e_2}(T^2) &\supset (f_u([AD]) \cup f_u([A'D'])), \\ f_u(T^2) \cap f_{u+e_3}(T^2) &\supset (f_u([BC]) \cup f_u([B'C'])), \\ f_{u+e_3}(T^2) \cap f_{u+e_3+e_2}(T^2) &\supset (f_{u+e_3}([AD]) \cup f_{u+e_3}([A'D'])), \\ f_{u+e_2}(T^2) \cap f_{u+e_2+e_3}(T^2) &\supset (f_{u+e_2}([BC]) \cup f_{u+e_2}([B'C'])). \end{aligned}$$

De plus

$$\forall w \in V_1 \oplus V_2, \quad f_u(T^2) \cap f_{u+w}(T^2) \supset f_u(v).$$

Comme lors du premier cas on a là toutes les intersections entre les $f_u(T^2)$.

Ainsi pour tout $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$, $f_u(T^2) \cup f_{u+e_2}(T^2) \cup f_{u+e_3}(T^2) \cup f_{u+e_2+e_3}(T^2)$ est homéomorphe à Sing_w^2 . On le note donc Sing_w^2 , où w est le projeté de u dans $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1$. On note v_w le cercle $f_u(v)$.

Le bord de Sing_w^2 est constitué de deux cercles obtenus à partir de $[CD]$ et $[C'D']$. Comme pour le premier cas, on attribue à chacun de ces cercles l'un des vecteurs v et v' de \mathbb{Z}_2^n/V_1 qui se projette sur w . On les note G_v et $G_{v'}$.

Troisième cas. Supposons maintenant que $n_1 = 2$ et $\alpha_2 \equiv \alpha_3[\pi]$ (c'est le seul cas où $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A) \setminus \{\Pi(x)\}$ n'est pas connexe). On vérifie facilement que les conditions de recollement sont les mêmes que pour le deuxième cas. Ainsi pour tout $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$, $f_u(T^3) \cup f_{u+e_2}(T^3) \cup f_{u+e_3}(T^3) \cup f_{u+e_2+e_3}(T^3)$ est homéomorphe à Sing_w^3 . On le note Sing_w^3 , où w est le projeté de u dans $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1$. On note v_w le cercle $f_u(v)$.

Le bord de Sing_w^3 est cette fois constitué de quatre cercles. La première patte est tournée vers la gauche sur les $f_u([CD])$ et sur les $f_u([C'D'])$ et vers la droite sur les $f_u([AB])$ et les $f_u([A'B'])$. On pose donc (comme on a fait implicitement lors du deuxième cas) :

$$\begin{aligned} G_v &= \bigcup_{s \in V_1} (f_{u+s}([CD]) \cup f_{u+s}([C'D'])), \\ G_{v'} &= \bigcup_{s \in V_1} (f_{u+s}([AB]) \cup f_{u+s}([A'B'])) \end{aligned}$$

où v et v' sont les vecteurs de \mathbb{Z}_2^n/V_1 qui se projettent sur w . Cette fois G_v et $G_{v'}$ ne sont pas connexes. Il existe en fait une façon naturelle de distinguer les deux cercles de G_v : il suffit de regarder leurs images par Π .

Cas zéro. On se place dans le cas où $n_1 = n_2 = 0$. Il n'y a pas de singularités mais pour fixer des notations communes, nous traitons tout de même ce cas. Dans ce cas $\Pi^{-1}(D_\rho)$ est homéomorphe à 2^{n_3} couronnes que l'on note Sing_w^0 avec $w \in \mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1$. Chacune de ces couronnes contient aussi une composante connexe de

$\Pi^{-1}(\omega_1)$ (l'analogue des cercles $f_u(v)$) que l'on note v_w . Elles contiennent chacune deux cercles qui bordent $\Pi^{-1}(D_\rho)$, on les note encore G_v et $G_{v'}$ avec v et v' dans \mathbb{Z}_2^n/V_1 se projetant sur w .

Les propriétés d'intersection des $f_u(T)$ vues plus haut disent en particulier que :

$$w - w' \in V_2 \Leftrightarrow \text{Sing}_w^i \cap \text{Sing}_{w'}^i \neq \emptyset \Leftrightarrow M_w^1 \cap \text{Sing}_{w'}^1 = v_w.$$

On a donc

Proposition 6.4. *Soit \mathcal{A} une araignée à n pattes telle que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ possède un point spécial isolé, noté ω_1 . Soit n_2 et n_3 les nombres définis en 6.2. Si de plus \mathcal{A} ne possède qu'une seule patte centrée issue de ω_1 , alors il existe un voisinage D de ω_1 et il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tels que $\Pi^{-1}(D)$ est homéomorphe à 2^{n_3} copies d'un collier de 2^{n_2} espaces Sing^i .*

6.4. Points spéciaux : cas général. On ne suppose plus $n_0 = 1$. Pour tout $r \in \{1, \dots, n_0\}$, on définit comme précédemment les angles θ_r et φ_r et un voisinage D_ρ . Il est clair que $\Pi^{-1}(\omega_1)$ est difféomorphe à 2^{n_3} tores de dimension n_0 notés $\mathbb{T}_h^{n_0}$ et paramétrés par les angles $\theta_r \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et indexés par $h \in \mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$.

Considérons une courbe $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ continue telle que $\Pi(\delta(0)) = \omega_1$ et pour tout $t \neq 0$, $\Pi(\delta(t)) \neq \omega_1$. Pour $t \neq 0$, connaissant $\Pi(\delta(t))$ et le sens dans lequel est pliée la patte r , les fonctions $\theta_r(t)$ sont facilement calculables. Si on fait tendre t vers 0 on voit alors que les $\theta_r(0)$ sont tous égaux modulo π . Autrement dit pour que le corps de l'araignée quitte ω_1 il faut tout d'abord aligner les pattes de P_0 . Il faut donc étudier ce qu'il se passe le long de \mathcal{Z}_h la courbe de $\mathbb{T}_h^{n_0}$ d'équation $\theta_1 = \dots = \theta_{n_0} \bmod \pi$. On remarque que cette équation définit 2^{n_0-1} cercles sur chaque tore.

On peut être plus précis et montrer que $\theta_r(0) = \theta_{r'}(0)$ si et seulement si les pattes r et r' sont tournées du même côté le long de $\delta(t)$. On voit aussi que le sens dans lequel sont tournées les pattes de P_1 et de P_2 n'a aucune influence sur $\delta(0)$. On peut donc attribuer un vecteur de $\mathbb{Z}_2^n/(\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2)$ à chacun des $2^{n_3+n_0-1}$ cercles composant $\bigcup_{h \in \mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)} \mathcal{Z}_h$. Il s'agit clairement d'une bijection. On peut donc noter ζ_r avec $r \in \mathbb{Z}_2^n/(\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2)$ ces cercles.

Pour chaque $u \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0})$, on définit une fonction f'_u (analogue des fonctions f_u définies à la section 6.3) qui, sachant dans quel sens sont tournées les pattes de P_1 , P_2 et P_3 et quelles sont les pattes de P_0 tournées dans le même sens que la première patte, associe à (θ_1, φ_1) un point de $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. Grâce à ces fonctions, on peut refaire toute la construction de la section 6.3 (en commençant par T). On définit de la même façon les composantes Sing_w^i , avec cette fois $w \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1$, leurs cercles v_w et leurs courbes de bord G_v , $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$. On voit que si r est le projeté de u , alors $f_u(\{\varphi_1 = 0\}) = \zeta_r$, en particulier si r est le projeté de w , alors $\zeta_r = v_w$.

Tout point de $\Pi^{-1}(D_\rho \setminus \{\omega_1\})$ appartient à un $f_u(T)$ ainsi $\Pi^{-1}(D_\rho)$ peut être vu comme une réunion de tores et de composantes Sing^i . Le recollement des uns et des autres se lit simplement sur les indices. On voit donc apparaître les espaces suivants :

DÉFINITION 6.5. Soient $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ un tore de dimension d et \mathcal{Z} la courbe d'équation $\theta_1 = \dots = \theta_d \pmod{\pi}$ tracée sur celui-ci. On recolle 2^{d-1} colliers de 2^m espaces Sing^i sur le tore, en identifiant chaque fil de collier avec une composante connexe de \mathcal{Z} . On appelle *tore \mathbb{T}^d décoré de 2^{d-1} colliers de 2^m espaces Sing^i* l'espace topologique obtenu ainsi.

On peut maintenant, en incluant les résultats de la proposition 6.1, donner une description générale des singularités qui s'envoient par Π sur des points isolés.

Théoreme 6.6. Soit \mathcal{A} une araignée à n pattes telle que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ possède un point singulier isolé $\Pi(x)$. Soient D un disque centré en $\Pi(x)$ qui ne rencontre que les côtés de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ contenant $\Pi(x)$ et n_0, n_1, n_2, n_3 les nombres définis en 6.2. Alors $\Pi^{-1}(D)$ a 2^{n_3} composantes connexes, de plus :

1. Si $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D \setminus \{\Pi(x)\}$ est connexe, alors les composantes de $\Pi^{-1}(D)$ sont homéomorphes à :

(a) un bouquet de 2^{n_2} disques, si $n_0 = 0$,

(b) un tore \mathbb{T}^{n_0} décoré par 2^{n_0-1} colliers de 2^{n_2} espaces Sing^{n_1} , si $n_0 \neq 0$.

Dans ce cas chaque composante de bord de $\Pi^{-1}(D)$ est naturellement indexée dans \mathbb{Z}_2^n/V_1 .

2. Si $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D \setminus \{\Pi(x)\}$ n'est pas connexe, alors les composantes de $\Pi^{-1}(D)$ sont homéomorphes à :

(a) un bouquet de 2^{n_2+1} disques, si $n_0 = 0$,

(b) un tore \mathbb{T}^{n_0} décoré par 2^{n_0-1} colliers de 2^{n_2} espaces Sing^3 , si $n_0 \neq 0$.

Chaque composante de bord de $\Pi^{-1}(D)$ est munie d'un signe (+ ou -), deux cercles ayant le même signe si et seulement si leurs images par Π sont égales. Elles sont regroupées par paires de signes différents appartenant à une même composante connexe et, si $n_0 \neq 0$, à un même espace Sing^3 . Chacune de ces paires est naturellement indexée dans \mathbb{Z}_2^n/V_1 .

L'indexation des composantes de bords induit (par projection canonique) une indexation des composantes connexes dans $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$. Si de plus $n_0 \neq 0$, elle induit aussi une indexation des espaces Sing^i dans $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1$ et des colliers dans $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$.

7. Espaces des configurations avec un point singulier

Soit \mathcal{A} une araignée et $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ son espace des configurations. On suppose que $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ est connexe (ou si on veut on ne regarde qu'une composante connexe), en particulier toutes les pattes sont donc utiles et $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ est connexe. On suppose aussi que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ possède un seul point singulier que l'on note y . On se donne un disque D centré en y qui ne rencontre que les côtés de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ issus de y .

7.1. Description de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D)$. Remarquons que $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D$ peut avoir deux composantes connexes. Lorsque ce sera le cas, on traitera séparément les images

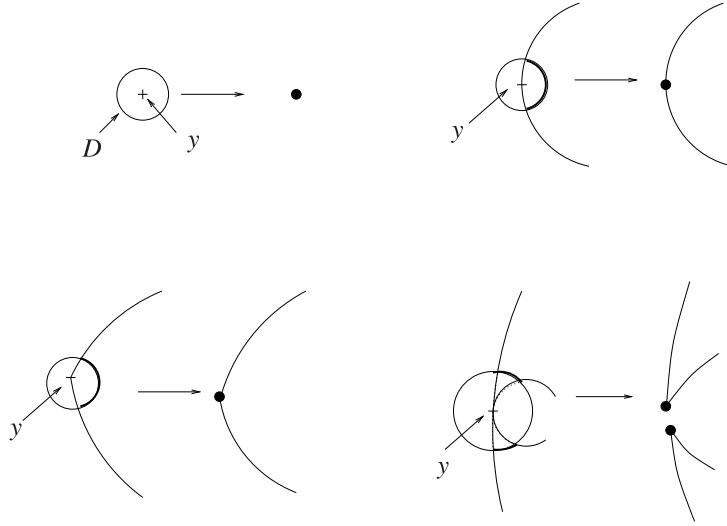


Fig. 15. la transformation de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D$ en B (au voisinage de y).

réciroques de chaque composante. On notera $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D)^+$ l'image réciroque de l'une et $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D)^-$ l'image réciroque de l'autre.

On commence par modifier $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D$ en remplaçant (comme pour la proposition 2.6) les éventuels cercles-points par des cercles et surtout en identifiant entre elles les extrémités de chaque arc de ∂D inclus dans $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ (si D est inclus dans $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$ on rebouche simplement $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D$). On remarque que cette opération crée deux points si $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \cap D \setminus \{y\}$ n'est pas connexe et un seul point sinon (cf. figure 15). On note B la brique obtenue. On désignera les points créés par le terme *points marqués* de B . Si B a deux composantes connexes, on les notera B^+ et B^- . On note p (resp. p^+ , resp. p^-) et k (resp. k^+ , resp. k^-) le nombre de sommets et de composantes de bord de B (resp. de B^+ , resp. de B^-). Les côtés de B sont encore associés à des pattes.

On a déjà réparti les pattes de \mathcal{A} en 4 familles. Pour décrire l'espace tout entier ce n'est pas suffisant.

DÉFINITION 7.1. On dit qu'une patte de P_i appartient à Q_i (resp. Q_i^+ , resp. Q_i^-) si B (resp. à B^+ , resp. à B^-) ne possède pas de côtés associés à cette patte. On note q_i (resp. q_i^+ , resp. q_i^-) le cardinal de Q_i (resp. Q_i^+ , resp. Q_i^-). On note W_i (resp. W_i^+ , resp. W_i^-) le sous-espace vectoriel de \mathbb{Z}_2^n engendré par les e_m avec $m \in P_i \setminus Q_i$ (resp. $m \in P_i \setminus Q_i^+$, resp. $m \in P_i \setminus Q_i^-$).

On peut maintenant décrire $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D)$.

Proposition 7.2. Soit B la brique obtenue à partir de $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus D$ en identifiant les extrémités des segments de ∂D inclus dans $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$.

1. Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D \setminus \{y\}$ est connexe, alors B est connexe, $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ a $2^{q_0+q_2}$ composantes connexes indexées par $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$ chacune est difféomorphe à une surface compacte à bord de genre $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p+4k-8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0-q_2-n_1}$ cercles.

Le bord de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ est constitué de 2^{n-n_1} cercles indexés dans \mathbb{Z}_2^n/V_1 .

2. Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D \setminus \{y\}$ n'est pas connexe, deux cas se présentent :

(a) Si B est connexe, $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ a $2^{q_0+q_2}$ composantes connexes indexées par $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$, chacune est difféomorphe à une surface compacte à bord de genre $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p+4k-8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0-q_2-n_1+1}$ cercles.

Le bord de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ est constitué de 2^{n-1} cercles (on pourrait leur attribuer un signe en regardant leur image par Π). Ces cercles sont regroupés par paire appartenant à une même composante connexe de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$. Ces paires de cercles sont indexées par \mathbb{Z}_2^n/V_1 .

(b) Si B n'est pas connexe alors $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^\pm$ a $2^{q_0^\pm+q_2^\pm+q_3^\pm}$ composantes connexes indexées par $\mathbb{Z}_2^n/W_0^\pm \oplus V_1 \oplus W_2^\pm \oplus W_3^\pm$, chacune est difféomorphe à une surface compacte à bord de genre $1 + 2^{n-q_0^\pm-q_2^\pm-q_3^\pm-3}(p^\pm+4k^\pm-8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0^\pm-q_2^\pm-q_3^\pm-n_1}$ cercles.

Le bord de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ est constitué de 2^{n-1} cercles. Ces cercles sont regroupés par paires l'un appartenant à $\partial\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^+$ l'autre à $\partial\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^-$. Ces paires de cercles sont indexées par \mathbb{Z}_2^n/V_1 . On attribue à chacun des cercles d'une paire le signe de la composante qu'il borde.

Preuve. On suppose B connexe. Les propositions 2.4 et 2.6 disent que $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ est une surface compacte lisse à bord ayant $2^{q_0+q_2}$ composantes connexes indexées par $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$. À partir de la composante connexe de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ d'indice u , on fabrique une surface fermée Σ_u en collant simplement un disque sur chaque cercle du bord. Le pavage de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ se prolonge naturellement en un pavage de Σ_u . Les briques de ce nouveau pavage sont homéomorphes à B et sont indexées par $\mathbb{Z}_2^{n-q_0-q_2}$ (on n'a conservé que les pattes vraiment utiles). On a une surface connexe pavée par des briques toutes identiques et dont les sommets sont recollés quatre à quatre. Le genre de Σ_u est donc donné par la formule de la proposition 3.1.

La surface Σ_u contient les points provenant des points marqués de B (que l'on continue d'appeler points marqués). Selon le cas les points marqués de B appartiennent à zéro, un ou deux côtés de B (cf. figure 15), les points marqués de la surface appartiennent donc à un, deux ou quatre pavés. Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D \setminus \{y\}$ est connexe, il y a un seul point marqué sur B , et chaque point marqué de Σ_u appartient à 2^{n_1} briques. On a donc $2^{n-q_0-q_2-n_1}$ points marqués sur Σ_u . Sinon, il y a deux points marqués sur B (on peut attribuer à l'un le signe $+$ et à l'autre $-$) et chaque point marqué de Σ_u appartient à 2^{n_1} briques. On a donc $2^{n-q_0-q_2-n_1+1}$ points marqués sur Σ_u .

Les côtés de B passant par les points marqués sont, par définition, ceux associés aux pattes appartenant à P_1 . On peut donc associer un vecteur de $\mathbb{Z}_2^{n-q_0-q_2}/V_1$ à chaque point marqué de Σ_u . Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D \setminus \{y\}$ n'est pas connexe, les points marqués

de Σ_u sont indexés par paires (mais on peut leur attribuer un signe), sinon ils sont bien indexés.

Les (paires de) points marqués de $\bigcup_u \Sigma_u$ sont donc indexé(e)s par \mathbb{Z}_2^n/V_1 . On remarque maintenant que $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ est obtenu en ôtant un voisinage de chacun des points marqués de $\bigcup_u \Sigma_u$. En transmettant au cercle ainsi créé l'indice (et éventuellement le signe) du point marqué on prouve les parties 1 et 2 (a) de la proposition. Il reste le cas où B n'est pas connexe, il est similaire et laissé au lecteur. \square

7.2. Collages bis. Pour obtenir \mathcal{C}_A , il ne reste plus qu'à recoller $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ et $\Pi^{-1}(D)$ ce qui donne :

Théorème 7.3. *Soit A une araignée dont toutes les pattes sont utiles et telle que $\Pi(\mathcal{C}_A)$ possède un unique point singulier. L'espace des configurations \mathcal{C}_A est homéomorphe à la surface obtenue en recollant bord à bord la surface lisse donnée par la proposition 7.2 et la surface singulière donnée par le théorème 6.6. Chaque composante de bord de l'une étant recollée sur la composante de même indice (et éventuellement de même signe) de l'autre.*

Cet énoncé peut sembler insuffisamment précis, mais tous les détails sont donnés dans les paragraphes suivants.

7.2.1. Cas non tangents. On traite ici les cas où y est un point isolé du bord de $\Pi(\mathcal{C}_A)$, où il ne passe qu'un seul côté non réduit à un point par y et où il passe deux côtés sécants par y . Dans chacun de ces cas, B est connexe et, si $n_0 \neq 0$, l'indice i associé à $\Pi^{-1}(D)$ par le théorème 6.6 est égal à n_1 .

On se donne d'une part $2^{q_0+q_2}$ surfaces connexes compactes de genre $1 + 2^{n-q_0-q_2-3} \times (p + 4k - 8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0-q_2-n_1}$ cercles. On attribue ensuite à chacune des composantes de bord un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de telle façon que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$ soit constant sur chaque surface connexe. On note G'_v la composante de bord associée à v .

D'autre part, si $n_0 \neq 0$, on se donne 2^{n_3} tores \mathbb{T}^{n_0} décorés de 2^{n_0-1} colliers de 2^{n_2} espaces Sing^{n_1} . On attribue ensuite à chacune des composantes de bord un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de telle façon que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ soit constant sur chaque tore décoré, que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$ soit constant sur chaque collier et que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1$ soit constant sur chaque Sing^{n_1} . On note G_v le cercle d'indice v .

Si $n_0 = 0$, on se donne 2^{n_3} bouquets de 2^{n_2} disques. On attribue ensuite à chacune des composantes de bord un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de telle façon que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/V_1 \oplus V_2$ soit constant sur chaque bouquet. On note G_v le cercle d'indice v .

Enfin, pour tout $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ on identifie le cercle G_v et le cercle G'_v . Les différents choix donnant des surfaces homéomorphes, la surface singulière obtenue est bien homéomorphe à \mathcal{C}_A .

7.2.2. S'il passe deux côtés tangents par y .

Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$ est connexe. La brique B est connexe, $n_1 = 2$ et $\Pi^{-1}(D)$ est donné par le théorème 6.6 avec $i = 3$.

On se donne, d'une part, $2^{q_0+q_2}$ surfaces compactes de genre $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p + 4k - 8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0-q_2-3}$ cercles. On regroupe par deux les composantes de bord de chaque surface. On attribue à chaque paire de cercles un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de telle façon que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$ soit constant sur chaque composante connexe. On note G'_v ces paires de cercles indexées.

Si $n_0 \neq 0$, on se donne, d'autre part, 2^{n_3} tores \mathbb{T}^{n_0} décorés de 2^{n_0-1} colliers de 2^{n_2} espaces Sing^3 . On regroupe les deux composantes de bord de chaque espace Sing^3 qui ne borde pas un même cône. On attribue à chaque paire de cercles un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de la même façon qu'au paragraphe 7.2.1. On note G_v ces paires de cercles indexées.

Si $n_0 = 0$, on se donne 2^{n_3} bouquet de 2^{n_2+1} disques. On regroupe par deux les composantes de bord de chaque bouquet. On attribue à chaque paire de cercles un vecteur $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ de telle façon que le projeté de v sur $\mathbb{Z}_2^n/V_1 \oplus V_2$ soit constant sur chaque bouquet.

Pour tout $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$, on identifie le cercle G_v et le cercle G'_v . Les différents choix donnant des surfaces homéomorphes, on voit que la surface singulière obtenue est homéomorphe à \mathcal{C}_A .

Si $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$ n'est pas connexe. La brique B n'est pas connexe, $n_1 = 2$ et $\Pi^{-1}(D)$ est donné par le théorème 6.6 avec $i = 3$.

Pour construire \mathcal{C}_A on part de $2^{q_0^++q_2^++q_3^+}$ surfaces compactes de genre $g = 1 + 2^{n-q_0^+-q_2^+-q_3^+-3}(p^+ + 4k^+ - 8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0^+-q_2^+-q_3^+-2}$ cercles et de $2^{q_0^-+q_2^-+q_3^-}$ surfaces compactes de genre $1 + 2^{n-q_0^-q_2^-q_3^-3}(p^- + 4k^- - 8)$ dont le bord est constitué de $2^{n-q_0^-q_2^-q_3^-2}$ cercles. On a donc deux familles de cercles. On indexe les cercles de chaque famille par \mathbb{Z}_2^n/V_1 de telle sorte que les projetés de v sur $\mathbb{Z}_2^n/W_0^\pm \oplus V_1 \oplus W_2^\pm \oplus W_3^\pm$ soient constants sur chaque composante connexe. Pour tout $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$, on note G'_v la paire de cercles dont l'indice est v . Les deux cercles n'appartiennent jamais à la même famille, on les distingue en les notant $^+G'_v$ et $^-G'_v$.

D'autre part, si $n_0 \neq 0$, on se donne 2^{n_3} tores \mathbb{T}^{n_0} décorés de 2^{n_0-1} colliers de 2^{n_2} espaces Sing^3 . Si $n_0 = 0$, 2^{n_3} bouquet de 2^{n_2+1} disques. On regroupe et on indexe les composantes de bord de la même manière qu'au paragraphe précédent. On note encore G_v la paire de cercles d'indice v . Si $n_0 \neq 0$ et $n_2 \geq 2$, on veut aussi distinguer les deux cercles composant G_v . On attribue à chacun un signe $+$ ou $-$ de telle sorte que deux cercles bordant des cônes de même sommets portent le même signe.

À nouveau, pour tout $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$, on identifie les cercles ^+G_v et $^+G'_v$, puis les cercles ^-G_v et $^-G'_v$. Les différents choix donnant des surface homéomorphes, on voit que la surface singulière obtenue est homéomorphe à $\Pi(\mathcal{C}_A)$.

7.3. Espace des configurations avec un nombre fini de points singuliers.

On note y_1, \dots, y_s les points singuliers de $\Pi(\mathcal{C}_A)$. Il s'agit simplement de refaire la construction de la section précédente en ajoutant l'indice correspondant à la singularité à chaque

étape (principalement il faut définir les analogues des familles P_i , Q_i , Q_i^\pm pour chaque singularité ce qui alourdit considérablement les notations). On modifie $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus (\bigcup_{1 \leq i \leq s} D_i)$ comme précédemment pour obtenir un pavé B (qui peut avoir beaucoup de composantes connexes) ayant s familles de points marqués. Cela nous permet de construire une surface à bord dont les composantes de bord sont regroupées en s familles. Pour chacune de ces familles on reproduit la construction de la section 7.2. L'espace singulier obtenu est homéomorphe à \mathcal{C}_A .

Références

- [1] M. Kapovich and J. Millson : *On the moduli space of polygons in the Euclidean plane*, J. Differential Geom. **42** (1995), 430–464.
- [2] M. Kapovich and J.J. Millson : *Universality theorems for configuration spaces of planar linkages*, Topology **41** (2002), 1051–1107.
- [3] J. O'Hara : *The configuration space of planar spidery linkages*, Topology Appl. **154** (2007), 502–526.
- [4] N. Shvalb, M. Shoham and D. Blanc : *The configuration space of arachnoid mechanisms*, Forum Math. **17** (2005), 1033–1042.

Université Bordeaux 1
 Institut de Mathématiques de Bordeaux
 351, cours de la libération, F-33405 Talence
 France
 e-mail: pierre.mounoud@math.u-bordeaux1.fr